Математические заметки

том 77 выпуск 1 январь 2005

УДК 517.95+512.7

ПОЛИНОМЫ ГИЛЬБЕРТА И ГИЛЬБЕРТА–САМЮЭЛЯ И УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. Г. Хованский, С. П. Чулков

В работе рассматриваются системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Алгебраическими методами описываются пространства формальных и аналитачеких решений такой системы. Определяются понятия полинома Гильберта и полинома Гильберта–Самюэля для системы уравнений в частных производных.

Библиография: 2 названия.

1. Введение. В статье рассматриваются общие системы линейных однородных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами на одну неизвестную функцию z комплексных переменных $x_1,\dots,x_n$. *Символ системы* – это алгебраическое многообразие M в двойственном пространстве с переменными $\xi_1,\dots,\xi_n$, идеал $\mathscr{I}$ которого порожден многочленами, полученными из уравнений системы заменой операций дифференцирования по переменным x_i на операции умножения на соответствующие переменные ξ_i. В статье изучается связь алгебраического многообразия M и пространств формальных и аналитических решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Одним из основных инвариантов алгебраического многообразия является его функция Гильберта (см., например, [1]). Это функция H натурального аргумента, сопоставляющая числу k размерность факторпространства полиномов степени не выше k по векторному подпространству, состоящему из полиномов, принадлежащих идеалу $\mathscr{I}$ многообразия. Знаменитая теорема Гильберта утверждает, что функция H является полиномом на множестве достаточно больших натуральных чисел. Степень этого полинома равна размерности r многообразия M, а старший коэффициент, умноженный на $r!$, есть степень многообразия M (т.е. посчитанное с учетом кратностей число точек пересечения многообразия с общей аффинной плоскостью дополнительной размерности). Какую роль играет полином Гильберта символа M для исходной системы дифференциальных уравнений? В статье дается ответ на этот вопрос.

В заданной точке u для каждого натурального числа k рассмотрим векторные пространства $\mathscr{O}_u(k)$ и $F_u(k)$ k-струй аналитических и формальных решений системы. В статье доказывается, что размерности этих пространств совпадают между собой, не зависят от точки u и равны значению $H(k)$ функции Гильберта символа системы в точке k

Работа второго автора выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 04-01-00762, и программы "Ведущие научные школы", грант № НШ-1972.2003.1.

(теорема 2, предложение 2). Доказательство проводится следующим образом: сначала алгебраически описываются пространства формальных решений системы в точке u (следствие 2). Из этого описания равенство $\dim F_u(k) = H(k)$ становится очевидным. Затем доказывается следующая теорема об аппроксимации (теорема 1): *для каждого формального решения в точке u данной системы и каждого натурального числа k существует квазиполиномиальное решение системы (т.е. линейная комбинация произведений полиномов на экспоненты линейных функций), имеющее ту же k-струю, что и заданное формальное решение.* Отсюда немедленно вытекает равенство $\dim F_u(k) = \dim \mathcal{O}_u(k)$.

Функция Гильберта–Самюэля является локальным инвариантом алгебраического многообразия (см., например, [1]). Верен следующий локальный аналог теоремы Гильберта. Рассмотрим векторное пространство k-струй ростков аналитических функций в точке u пространства переменных $\mathbb{C}^n$. Две k-струи называются *эквивалентными*, если их разность совпадает в точке u с k-струей некоторого многочлена, принадлежащего идеалу $\mathcal{I}$ алгебраического многообразия. Размерность $HS_u(k)$ получающегося факторпространства – это значение в точке k функции Гильберта–Самюэля многообразия в точке u. Локальный вариант теоремы Гильберта утверждает, что функция $HS_u(k)$ является полиномом на множестве достаточно больших натуральных чисел. Степень этого полинома равна размерности r ростка многообразия M в точке u, а старший коэффициент, умноженный на $r!$, есть кратность точки u многообразия M (т.е. кратность пересечения в точке u многообразия M с общей аффинной плоскостью дополнительной размерности). В статье выясняется роль многочлена Гильберта–Самюэля символа системы для исходной системы дифференциальных уравнений. Решения вида $P(x)e^{(u,x)}$, где $P(x)$ – многочлен степени не выше k, образуют векторное пространство. Мы доказываем, что размерность этого пространства равна $HS_u(k)$ (предложение 4).

В случае, когда пространство решений системы конечномерно, все ее решения являются квазиполиномами, как и в классическом случае линейного обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Все рассуждения статьи весьма просты и относятся скорее к алгебраической геометрии, чем к теории дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Формальные решения системы. В этом пункте мы отождествляем формальные решения системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами с линейными функционалами на кольце дифференциальных операторов и описываем пространства формальных и полиномиальных решений системы.

Введем необходимые обозначения. Мы рассматриваем системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на одну неизвестную функцию:

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha} a^1_\alpha \partial_\alpha z(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{\alpha} a^i_\alpha \partial_\alpha z(x) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \qquad a^i_\alpha \in \mathbb{C}. \tag{S}$$

Здесь и далее $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ – пространство независимых переменных, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ – мультииндекс,

$$\partial_\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{и} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Число уравнений в системе (S) может быть и бесконечным.

Отметим, прежде всего, что для систем с постоянными коэффициентами пространства формальных и аналитических решений системы не зависят от точки u пространства переменных, в окрестности которой они рассматриваются. Действительно, если ряд $f(x) \in \mathbb{C}[[x]]$ является решением системы, то и ряд $f(x-u) \in \mathbb{C}[[x-u]]$ является решением системы для любой точки u пространства $\mathbb{C}^n$. Векторное пространство формальных решений системы (S) будем обозначать через $F(S)$.

Обозначим через Dif_n кольцо дифференциальных операторов с постоянными комплексными коэффициентами от переменных $x_1, \dots, x_n$; оператор $d \in \mathrm{Dif}_n$ имеет вид

$$d = \sum_{\alpha \in \operatorname{supp} d} d_\alpha \partial_\alpha, \tag{1}$$

где $\operatorname{supp} d \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$ – конечное подмножество, а коэффициенты d_α – ненулевые комплексные числа. Множество $\operatorname{supp} d$ будем называть *носителем* оператора d. Формула (1) отождествляет пространства Dif_n и $\mathbb{C}[\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n]$. Более того, так как мы работаем с операторами, имеющими постоянные коэффициенты, (1) устанавливает изоморфизм колец

$$\mathrm{Dif}_n \simeq \mathbb{C}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]$$

(т.е. композиция операторов и произведение соответствующих многочленов совпадают). Пусть далее, $\widehat{\mathrm{Dif}}_n$ – кольцо формальных дифференциальных операторов от переменных $x_1, \dots, x_n$. Формальный дифференциальный оператор – это ряд

$$d = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}} d_\alpha \partial_\alpha,$$

где $d_\alpha \in \mathbb{C}$. Структура кольца задается композицией операторов. Так как мы рассматриваем кольцо формальных операторов с постоянными коэффициентами, имеется естественный изоморфизм колец

$$\widehat{\mathrm{Dif}}_n \simeq \mathbb{C}\left[\left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right]\right].$$

Будем рассматривать Dif_n и $\widehat{\mathrm{Dif}}_n$ как бесконечномерные топологические векторные пространства над полем комплексных чисел с топологией покоординатной сходимости. Пусть V – топологическое векторное пространство. Через V^* будем обозначать пространство, сопряженное к V.

Лемма 1. *Следующие пространства естественным образом изоморфны*:

$$(\mathrm{Dif}_n)^* \simeq \mathbb{C}[[x]], \tag{2}$$

$$(\widehat{\mathrm{Dif}}_n)^* \simeq \mathbb{C}[x]. \tag{3}$$

Причем, естественные вложения $\mathrm{Dif}_n \to \widehat{\mathrm{Dif}}_n$ *и* $\mathbb{C}[x] \to \mathbb{C}[[x]]$ *сопряжены.*

Доказательство. Изоморфизм (2), очевидно, устанавливается следующим отображением:

$$\begin{gathered} \mathbb{C}[[x]] \to (\mathrm{Dif}_n)^*, \\ f(d) = d(f)|_0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $f, d(f) \in \mathbb{C}[[x]]$, $d \in \mathrm{Dif}_n$, а через $d(f)|_0$ обозначен свободный член ряда $d(f)$. Проверим, что изоморфизм (3) устанавливает отображение

$$\begin{gathered} \mathbb{C}[x] \to (\widehat{\mathrm{Dif}}_n)^*, \\ p(d) = d(p)(0), \end{gathered} \tag{5}$$

где $p, d(p) \in \mathbb{C}[x]$, $d \in \widehat{\mathrm{Dif}}_n$. Инъективность (5) очевидна. Установим сюръективность. Пусть $l \in (\widehat{\mathrm{Dif}}_n)^*$ – непрерывный функционал; мы утверждаем, что значения $l(\partial_\alpha)$ отличны от нуля только для конечного числа $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$. Тем самым, (5) сюръективно. Действительно, предположим обратное. Пусть $l(\alpha_i) = l_i \neq 0$, где $i = 1, 2, \dots$ и $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$. Последовательность $\{\frac{i}{l_i}\partial_{\alpha_i}\}$, очевидно, сходится к 0 в $\widehat{\mathrm{Dif}}_n$, но последовательность $\{l(\frac{i}{l_i}\partial_{\alpha_i}) = i\}$ расходится. Противоречие. Последние утверждения леммы – следствие явных формул (4) и (5).

Обозначим через $\mathscr{I}$ идеал кольца Dif_n, порожденный операторами, входящими в левые части уравнений системы (S). Установим соответствие между формальными решениями системы и линейными функционалами на кольце дифференциальных операторов.

Предложение 1. *Формальный ряд $f \in \mathbb{C}[[x]]$ задает линейный функционал на пространстве Dif_n, тождественно равный нулю на идеале $\mathscr{I}$, тогда и только тогда, когда для любого оператора $d \in \mathscr{I}$ формальный ряд $d(f)$ тождественно нулевой.*

Доказательство. Действительно, для произвольного оператора $d \in \mathrm{Dif}_n$ равенство $d(f) = 0$ равносильно тому, что

$$\partial_\alpha\bigl(d(f)\bigr)\big|_0 = (\partial_\alpha \circ d)(f)|_0 = 0$$

для всех $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$.

Следствием доказанного предложения является

Следствие 1. *Пространство $F(S)$ формальных решений системы (S) естественным образом изоморфно векторному пространству линейных функционалов на кольце Dif_n, обнуляющихся на идеале $\mathscr{I}$.*

Предположим, что имеет место разложение $\mathrm{Dif}_n = KI \oplus \mathscr{I}$, где KI – векторное подпространство трансверсальное $\mathscr{I}$. Еще одной переформулировкой предложения 1 является

Следствие 2. *Имеют место изоморфизмы векторных пространств*

$$F(S) \simeq (KI)^* \simeq (\mathrm{Dif}_n / \mathscr{I})^*. \tag{6}$$

Опишем теперь пространство $A_0(S)$ полиномиальных решений системы.

Лемма 2. *Имеет место естественный изоморфизм*

$$A_0(S) \simeq (\widehat{\mathrm{Dif}}_n/\mathscr{I}\cdot\widehat{\mathrm{Dif}}_n)^*. \tag{7}$$

Через $\mathscr{I}\cdot\widehat{\mathrm{Dif}}_n$ обозначен наименьший идеал в кольце $\widehat{\mathrm{Dif}}_n$, содержащий идеал $\mathscr{I}$ (кольцо Dif_n мы рассматриваем как подкольцо кольца $\widehat{\mathrm{Dif}}_n$).

Доказательство. В силу леммы 1 мы можем отождествить пространство $(\widehat{\mathrm{Dif}}_n/\mathscr{I}\cdot\widehat{\mathrm{Dif}}_n)^*$ с векторным подпространством в кольце многочленов $\mathbb{C}[x]$. Сравнивая (4) и (5), получаем, что при этом отождествлении

$$A_0(S) = (\widehat{\mathrm{Dif}}_n/\mathscr{I}\cdot\widehat{\mathrm{Dif}}_n)^*.$$

Важно отметить, что в лемме выше и далее в тексте все векторные пространства, отождествляемые естественным образом с пространством формальных рядов, рассматриваются с топологией покоординатной сходимости, а их факторпространства с индуцированной топологией.

3. Символ системы как алгебраическое многообразие. В этом пункте мы напомним определение символа системы уравнений (S) и некоторые алгебраические понятия, которые потребуются нам далее.

Введем в рассмотрение пространство $(\mathbb{C}^n)^* = \{\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \mid (\xi_i, x_j) = \delta_i^j\}$, двойственное пространству независимых переменных.

Рассмотрим изоморфизм колец

$$\begin{gathered}\mathrm{pr}\colon\widehat{\mathrm{Dif}}_n \to \mathbb{C}[[\xi_1,\dots,\xi_n]],\\ \mathrm{pr}(\partial_\alpha) = \xi^\alpha.\end{gathered} \tag{8}$$

Символом (или *полным символом*) системы (S) мы называем аффинное алгебраическое множество (многообразие) M в пространстве $(\mathbb{C}^n)^*$, соответствующее идеалу $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$ кольца $\mathbb{C}[\xi_1,\dots,\xi_n]$. Точнее, *аффинным алгебраическим многообразием* M мы называем пару $\langle\widetilde{M},\mathrm{pr}(\mathscr{I})\rangle$, где $\widetilde{M}$ есть множество общих нулей многочленов, составляющих идеал $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$.

Такое определение не является общепринятым, но оно наиболее удобно для наших целей. Алгебраическое многообразие M, вообще говоря, является особым, приводимым и имеет вложенные компоненты. В случае, когда идеал $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$ прост, получаем классическое определение аффинного алгебраического многообразия (см., например, [1]). Все используемые алгебраические понятия и утверждения естественным образом обобщаются на рассматриваемый случай (см., [1] и [2]).

Напомним некоторые необходимые понятия алгебраической геометрии. *Аффинным координатным кольцом* (или *кольцом регулярных функций*) алгебраического многообразия M называется $R_M := \mathbb{C}[\xi]/\mathrm{pr}(\mathscr{I})$ (его элементы называются соответственно *регулярными функциями*).

Локальным кольцом точки δ многообразия M называется локализация аффинного координатного кольца R_M по мультипликативной системе, состояшей из регулярных функций, не обращающихся в нуль в точке δ (см., например, [1]). Это кольцо мы будем обозначать через $\mathscr{O}_{\delta,M}$. Кроме того, через $\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$ мы будем обозначать формальное пополнение кольца $\mathscr{O}_{\delta,M}$ по максимальному идеалу (см., например, [1]). Следующее выражение также можно считать определением кольца $\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$:

$$\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M} = \mathbb{C}[[\xi-\delta]] / \operatorname{pr}(\mathscr{I}) \cdot \mathbb{C}[[\xi-\delta]].$$

Через $\operatorname{pr}(\mathscr{I}) \cdot \mathbb{C}[[\xi-\delta]]$ в формуле (15) обозначен наименьший идеал кольца $\mathbb{C}[[\xi-\delta]]$ формальных рядов с центром в точке ξ, содержащий все многочлены, составляющие идеал $\operatorname{pr}(\mathscr{I})$ (мы считаем, что кольцо многочленов $\mathbb{C}[\xi]$ естественным образом вложено в кольцо формальных рядов $\mathbb{C}[[\xi-\delta]]$).

Для каждой точки $\delta \in M$ определен естественный гомоморфизм колец

$$R_M \to \widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}; \tag{9}$$

действительно, многочлен есть функция, определенная на всем аффинном пространстве; следовательно, мы можем разложить его в ряд в окрестности точки δ и рассмотреть как элемент кольца $\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$.

4. Символ системы и ее формальные решения. В этом пункте формальные решения системы (S) интерпретируются как линейные функционалы на аффинном координатном кольце алгебраического многообразия M. Изучаются пространства струй формальных решений.

В терминах аффинного координатного кольца многообразия M мы, очевидно, можем проинтерпретировать изоморфизм (6) следующим образом.

Лемма 3. *Следующие пространства изоморфны*:

$$F(S) \simeq R_M^*. \tag{10}$$

Для целых неотрицательных i положим

$$F_i(S) = F(S) / \bigl(f \sim g \overset{\text{def}}{\iff} f-g = o(x^i)\bigr) \tag{11}$$

– пространство i-струй формальных решений. Выражение $o(x^i)$ понимается как ряд, составленный из мономов x^α, показатели которых удовлетворяют неравенству $|\alpha| > i$.

Далее, пусть

$$R_i = \bigl\{[p] \in R_M \mid p \in \mathbb{C}[x],\ \deg p < i+1\bigr\}. \tag{12}$$

Пространства связаны следующим образом.

Лемма 4. *Векторные пространства*

$$F_i(S) \cong R_i^* \tag{13}$$

изоморфны для каждого i.

Доказательство. Действительно, задание i-струи формального решения f системы равносильно заданию значений соответствующего функционала на операторах ∂_α для $|\alpha| \leqslant i$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}$), т.е. на подпространстве $R_i \subset R_M$ (см. (4)), откуда получаем требуемое.

Функцию $FH(i) = \dim F_i(S)$ натурального аргумента i назовем *функцией Гильберта системы* (S).

Напомним, что функция $H(i) = \dim R_i$ называется *функцией Гильберта алгебраического многообразия* M.

В силу (13) $\dim F_i(S) = \dim R_i$. Следовательно, мы получаем

Предложение 2. *Функция Гильберта системы (S) совпадает с функцией Гильберта символа M этой системы. В частности, функция Гильберта FH системы является многочленом на множестве достаточно больших натуральных i. Причем, степень r этого многочлена равна размерности символа M системы, а старший коэффициент есть отношение $\deg \overline{M}/r!$.*

Через $\deg \overline{M}$ мы обозначаем степень замыкания M в $\mathbb{CP}^n$ при стандартном вложении.

5. Символ системы и ее аналитические решения. В этом пункте исследуется соотношение между пространствами формальных и аналитических решений системы. С символом M системы связывается некоторый специальный класс ее аналитических решений; доказывается теорема аппроксимации формальных решений аналитическими решениями специального вида.

Обозначим через $A_\delta(S)$, где δ – точка пространства $(\mathbb{C}^n)^*$, векторное пространство решений системы вида

$$p(x)e^{(\delta,x)}, \tag{14}$$

где $p \in \mathbb{C}[x]$ – многочлен.

Опишем пространства $A_\delta(S)$.

Предложение 3. *Следующие пространства естественным образом отождествлены:*

$$A_\delta(S) \simeq \big(\mathbb{C}[[\xi-\delta]]/\operatorname{pr}(\mathscr{I}) \cdot \mathbb{C}[[\xi-\delta]]\big)^* = (\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M})^*. \tag{15}$$

Причем, естественное отображение $A_\delta(S) \to F(S)$ сопряжено к естественному отображению $R_M \to \widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$.

Доказательство. Для $\delta = 0$ наше утверждение (15) есть очевидная переформулировка леммы 2. Утверждение (15) для любого δ сводится к случаю $\delta = 0$ применением следующей формулы:

$$d\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)P(x)e^{(\delta,x)} = e^{(\delta,x)} d\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \delta_1, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} + \delta_n\right)f(x). \tag{16}$$

Здесь f – голоморфная функция, $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$ – точка пространства $(\mathbb{C}^n)^*$, а $d(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$ – дифференциальный оператор (d есть многочлен от переменных $\partial/\partial x_1$).

Докажем вторую часть предложения. Обозначим естественное отображение $R_M \to \widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$ через f, а естественное отображение $A_\delta(S) \to F(S)$ через g. Пусть $\varphi \in A_\delta(S)$ и $d \in R_M$. Тогда

$$\big(g(\varphi)\big)(d) = \operatorname{pr}^{-1}(d)\big(g(\varphi)\big)\big|_0 = \big(\operatorname{pr}^{-1}(d)(\varphi)\big)(0) = \varphi\big(g(d)\big),$$

что и требовалось.

Следствие 3. *Система (S) имеет нетривиальные решения вида (14) в том и только том случае, когда точка δ лежит на многообразии M.*

Доказательство. Действительно, если δ лежит на многообразии M, все многочлены, принадлежащие идеалу $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$, обнуляются в точке δ, а значит идеал $\mathrm{pr}(\mathscr{I})\cdot\mathbb{C}[[\xi-\delta]]$ не содержит 1 и факторпространство отлично от 0. Иначе говоря, функция $e^{(\delta,x)}$ заведомо является решением в этом случае.

Если же δ не лежит на многообразии M, идеал $\mathrm{pr}(\mathscr{I})\cdot\mathbb{C}[[\xi-\delta]]$ содержит 1 и, следовательно, совпадает со всем пространством $\mathbb{C}[[\xi-\delta]]$.

Аналогично (11) для целых неотрицательных i положим

$$A_{\delta,i}(S)=A_\delta(S)/\big(f\sim g \overset{\text{def}}{\iff} f-g=o(x^i)\big) \tag{17}$$

– пространство i-струй в нуле решений вида $p(x)e^{(\delta,x)}$, где δ есть точка пространства $(\mathbb{C}^n)^*$. Далее, пусть

$$[\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}]_i=\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}/\mathscr{M}_\delta^{i+1}, \tag{18}$$

где через $\mathscr{M}_\delta$ обозначен максимальный идеал локального кольца $\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$. Следующая лемма устанавливает связь между пространствами $A_{\delta,i}(S)$ и $[\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}]_i$.

Лемма 5. *Для каждого i имеет место изоморфизм*

$$A_{\delta,i}(S)\cong[\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}]_i^*. \tag{19}$$

Доказательство. Задание i-струи квазиэкспоненциального решения в точке $\delta\in M$ равносильно заданию линейного функционала (на пространстве формальных дифференциальных операторов с центром в точке δ), соответствующего этому решению на операторах $(\partial/\partial x-\xi)^\alpha$ при $|\alpha|\leqslant i$ $(\alpha\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0})$.

Для каждой точки δ пространства $(\mathbb{C}^n)^*$ функцию $AHS_\delta(i)=\dim A_{\delta,i}(S)$ натурального аргуметна i назовем *функцией Гильберта–Самюэля* системы (S) в точке δ.

Напомним, что для каждой точки δ многообразия M определена функция Гильберта–Самюэля $HS_\delta(i)=\dim[\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}]_i$. Для точек δ, не принадлежащих многообразию M, естественно определять функцию Гильберта–Самюэля тождественным нулем. Таким образом, мы будем считать функцию Гильберта–Самюэля HS определенной для каждой точки пространства $(\mathbb{C}^n)^*$.

В силу (19) $\dim A_{\delta,i}(S)=[\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}]_i$; следовательно, мы получили

Предложение 4. *Для каждой точки δ пространства $(\mathbb{C}^n)^*$ функция Гильберта–Самюэля системы (S) в точке δ совпадает с функцией Гильберта–Самюэля символа M системы в точке δ. В частности, функция Гильберта–Самюэля $AHS_\delta(i)$ для каждой точки δ пространства $(\mathbb{C}^n)^*$ является многочленом на множестве достаточно больших натуральных i. Причем, степень r этого многочлена равна размерности символа M системы, а старший коэффициент равен* $\mathrm{mult}_M\,\delta/r!$.

Отметим, что если точка δ не лежит на многообразии M, ее кратность естественно считать нулевой. Кратность гладкой точки многообразия равна 1.

Следствие 4. *Для гладкой точки δ символа M системы функция Гильберта–Самюэля системы (S) в этой точке есть*

$$AHS_\delta(i)=C^i_{n+i-1}. \tag{20}$$

Через C^k_n здесь и далее мы обозначаем число сочетаний из n элементов по k.

Доказательство. Для гладкой точки δ символа M кольцо $\widehat{\mathscr{O}}_{\delta,M}$ изоморфно кольцу степенных рядов от r переменных (напомним, что r есть размерность алгебраического многообразия M). Следовательно, значение функции Гильберта–Самюэля $HS_\delta(i)$ равно размерности пространства полиномов степени не выше i от r переменных. То есть $HS_\delta(i) = C^i_{n+i-1}$, откуда получаем требуемое.

Докажем теперь теорему об аппроксимации формальных решений системы (S) ее решениями вида (14).

Пусть $\mathrm{pr}(\mathscr{I}) = \mathscr{I}_1 \cap \dots \cap \mathscr{I}_t$ – примарное разложение идеала $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$ (см. [2]). Рассмотрим t различных точек $\xi_1, \dots, \xi_t \in M$; ξ_k лежит на компоненте (может быть, вложенной) многообразия M, соответствующей примарному идеалу $\mathscr{I}_k$.

Теорема 1. *Для каждого неотрицательного целого числа m и формального решения*

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}} f_\alpha x^\alpha$$

найдутся квазиполиномиальные решения системы $P_1(x)e^{(\xi_1,x)}, \dots, P_t(x)e^{(\xi_t,x)}$ такие, что

$$j^m_0 f = \sum_{|\alpha| \leqslant m} f_\alpha x^\alpha = \sum_{i=1}^{t} j^m_0 P_i(x) e^{(\xi_i,x)}. \tag{21}$$

Пусть $\mathscr{O}_i(S)$ – пространство i-струй в нуле аналитических решений системы. Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *Для каждого i размерности пространств $\dim \mathscr{O}_i(S)$ и $\dim F_i(S)$ совпадают. Тем самым, размерность пространства $\mathscr{O}_i(S)$ полиномиально зависит от i при достаточно больших i.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $\xi \in M$ – произвольная точка. Будем отождествлять пространства $F(S)$ и $A_\xi(S)$ с двойственными пространствами к R_M и $\widehat{\mathscr{O}}_{\xi,M}$ соответственно. Для каждой пары p, q целых неотрицательных чисел такой, что $q \geqslant p$, корректно определено линейное отображение

$$f_{p,q} \colon \bigoplus_j A_{\xi_j,q}(S) \to F_p(S), \tag{22}$$

индуцированное естественным отображением $\bigoplus_j A_{\xi_j}(S) \mapsto F(S)$ (каждое квазиэкспоненциальное решение раскладывается в ряд в окрестности 0, и соответствующие ряды складываются). В силу последнего утверждения предложения 3 сопряженное отображение

$$f^*_{p,q} \colon R_p \to \bigoplus_j [\widehat{\mathscr{O}}_{\xi_i,M}]_q \tag{23}$$

индуцировано естественным отображением $R_M \to \bigoplus_j \widehat{\mathscr{O}}_{\xi_i,M}$ (см. (9)). Для любых p и q, $q \geqslant p$, отображения $f_{p,q}$ и $f^*_{p,q}$ – это линейные отображения конечномерных векторных пространств; значит, если ядро отображения $f^*_{p,q}$ равно нулю, то отображение $f_{p,q}$ сюръективно. Следовательно, теорема 1 равносильна следующему утверждению.

Лемма 6. *Для каждого неотрицательного целого m найдется такое неотрицательное целое число $N(m) \geqslant m$, что отображение $f^*_{m,N(m)}$ имеет нулевое ядро.*

Мы свели теорему 1 к чисто алгебраическому утверждению о структуре алгебраического многообразия M. Прежде чем доказывать лемму для произвольного алгебраического многообразия M, разберем случай, когда символ M системы является связным гладким многообразием. В этом случае $t = 1$ и ξ_1 — произвольная точка M. Фиксируем некоторое целое неотрицательное число m, и пусть p есть элемент R_m. Можно считать, что p – это просто многочлен степени не выше m, не равный тождественно нулю на многообразии M. Тем самым, корректно определена кратность $N(p) < \infty$ обращения в нуль многочлена p в точке ξ_1. Кратность $N(p)$ – это наибольшее целое неотрицательное число такое, что многочлен p принадлежит степени $\widehat{\mathscr{M}}^{N(p)}_{\xi_1,M}$ максимального идеала локального кольца $\widehat{\mathscr{O}}_{\xi_1,M} \cong \mathbb{C}[[y_1,\dots,y_r]]$, где $y_1,\dots,y_r$ – локальные координаты на многообразии M в окрестности точки ξ_1. Так как для каждого p кратность $N(p) < \infty$, естественное линейное отображение $R_M \to \widehat{\mathscr{O}}_{\xi_1,M}$ не имеет ядра. Элементы кольца R_m, обращающиеся в нуль в точке ξ_1 с кратностью не меньшей некоторого числа $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, очевидно, образуют векторное подпространство в R_m. Будем обозначать его через V_i. Получаем бесконечную убывающую фильтрацию

$$R_m = V_0 \supseteq V_1 \supseteq V_2 \supseteq \cdots ,$$

пространство R_m конечномерно; следовательно, фильтрация стабилизируется, начиная с некоторого номера $N_0(m)$. Положим $N(m) = \max(N_0(m), m)$. Тогда естественное отображение

$$R_m \to [\widehat{\mathscr{O}}_{\xi_1,M}]_{N(m)} \tag{24}$$

имеет нулевое ядро, что и теребовалось. Доказательство леммы в общем случае совершенно аналогично, но требует применения нескольких результатов коммутативной алгебры, которые можно найти, например, в [2].

Доказательство леммы 6. Докажем, что естественное отображение

$$R_M \to \bigoplus_1^t \widehat{\mathscr{O}}_{\xi_i,M} \tag{25}$$

не имеет ядра. Пусть $p \in \mathbb{C}[\xi] \setminus \mathrm{pr}(\mathscr{I})$. Так как p не принадлежит $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$, существует k, $1 \leqslant k \leqslant t$, такое, что p не принадлежит примарному идеалу $\mathscr{I}_k$. Не ограничивая общности, можно считать, что $k = 1$. Пусть $\mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$ – кольцо рациональных функций, знаменатели которых не обращаются в 0 в точке ξ_1 (другими словами, $\mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$ – это локализация кольца многочленов $\mathbb{C}[\xi]$ по дополнению к простому идеалу $\mathscr{M}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$, составленному из всех многочленов, обращающихся в 0 в точке ξ_1). Кольцо многочленов $\mathbb{C}[\xi]$ естественным образом вложено в свою локализацию $\mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$. Примарный идеал $\mathscr{I}_1$ содержится в $\mathscr{M}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$. В этом случае (см., например, [2])

$$\mathscr{I}_1 \cdot \mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n} \cap \mathbb{C}[\xi] = \mathscr{I}_1;$$

с другой стороны,

$$\mathrm{pr}(\mathscr{I}) \cdot \mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n} = (\mathscr{I}_1 \cdot \mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}) \cap \dots \cap (\mathscr{I}_t \cdot \mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}).$$

Многочлен p как элемент кольца $\mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$ не принадлежит идеалу $\mathscr{I}_1 \cdot \mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$, а следовательно, *$p$ не принадлежит* идеалу $\mathrm{pr}(\mathscr{I}) \cdot \mathscr{O}_{\xi_1,\mathbb{C}^n}$.

Таким образом, мы получили, что многочлен, определяющий ненулевой элемент кольца R_M, определяет ненулевой элемент локального кольца

$$\mathscr{O}_{\xi_k,M} = \mathscr{O}_{\xi_k,\mathbb{C}^n}/(\mathrm{pr}(\mathscr{I}) \cdot \mathscr{O}_{\xi_k,\mathbb{C}^n})$$

для некоторого k. Но по теореме Крулля (см., например, [2]) естественный гомоморфизм

$$\mathscr{O}_{\xi,M} \to \widehat{\mathscr{O}}_{\xi,M},$$

где $\xi \in M$ – произвольная точка, инъективен. Следовательно, мы получили, что ненулевой элемент кольца R_M переходит при естественном отображении в ненулевой элемент кольца $\widehat{\mathscr{O}}_{\xi_k,M}$ для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant t$, откуда получаем (25).

Далее, рассуждениями, дословно повторяющими соответствующие рассуждения в гладком случае (строим убывающую фильтрацию векторными подпространствами в конечномерном векторном пространстве), получаем, что для каждого неотрицательного целого m найдется неотрицательное целое число $N(m) \geqslant m$ такое, что естественное отображение

$$R_m \to \bigoplus_j [\widehat{\mathscr{O}}_{\xi_i,M}]_{N(m)}$$

не имеет ядра, что и требовалось.

Доказательство предложения закончено.

6. Пример: гармонические функции. Пусть система (S) состоит из одного уравнения

$$\Delta z = 0, \tag{26}$$

где

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

– оператор Лапласа. В этом случае идеал $\mathrm{pr}(\mathscr{I})$ является простым, и

$$M = \{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 = 0\} \tag{27}$$

есть классическое алгебраическое многообразие. Все точки многообразия M, кроме начала координат, гладкие. Следовательно, в силу следствия 4 имеем

$$HS_\delta(i) = C_{n+i-1}^i, \tag{28}$$

где $n, i > 1$; $\delta(\neq 0) \in M$.

Нетрудно вычислить, что

$$H(i) = HS_0(i) = C_{n+i-1}^i + C_{n+i-1}^{i-1} = \frac{2}{(n-1)!}\, i^{(n-1)} + \{\text{младшие члены}\} \tag{29}$$

для $i > 2$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мамфорд Д. Алгебраическая геометрия I. Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1978.

[2] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. М.: Мир, 1972.

(А. Г. Хованский) Институт системного анализа РАН, University of Toronto

(С. П. Чулков) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Независимый Московский университет

E-mail: askold@math.toronto.edu, chulkov@mccme.ru

Поступило 01.09.2003